

4. Contribucions a l'acústica dels tubs cònics.

En la recerca sobre l'acústica de les xeremies de la *cobla* no vàrem trobar fetes totes les eines teòriques que ens calien i això ens va portar a desenvolupar-les. Com a contribucions més rellevants cal esmentar:

- Formulació, en el domini temporal, de les **funcions de reflexió amb creixement exponencial** associades a certes discontinuïtats en tubs cònics.
- Desenvolupament d'un **mètode de multiconvolució** adequat per a tubs cònics amb múltiples discontinuïtats, i capaç de tractar els casos amb algunes funcions de reflexió amb creixement exponencial.
- Exploració de l'aplicabilitat de les **funcions de resposta impulsional alternatives** corresponent a l'acoblament del tub a terminacions o prolongacions anecoïques.
- Formulació general de **l'equació d'ona unidimensional en pavellons axisimètrics**.

4.1 FUNCIONS DE REFLEXIÓ AMB EXPONENCIALS CREIXENTS.

En primera aproximació. l'acústica lineal de les columnes d'aire dels instruments de vent pot ser estudiada a partir de la propagació d'ones unidimensionals, i de la seva reflexió i transmissió en les discontinuïtats. Per fer-ho hi ha dos grans àmbits *el freqüencial* i *el temporal*.

La modelització freqüencial pressuposa règims permanents sinusoidals que se superposen. Això la fa artificialosa i la fa inadequada en l'estudi d'interaccions no lineals de la columna d'aire, com és el cas de l'autoexcitació en els transitoris d'atac i els règims permanents en les xeremies. El seu gran avantatge és la senzillesa i precisió de les tècniques de càlcul i experimentals.

La modelització temporal és la més propera a la realitat física perquè els fenòmens físics evolucionen en el temps. El seu principal avantatge és que, per aquesta raó, pot ser emprada per a descriure la interacció no lineal de la columna d'aire amb els elements que fonamenten l'autoexcitació en els instruments musicals, cosa que la fa preferir a la modelització freqüencial, tot i ser més complicada des del punt de vista del càlcul. El seu inconvenient més gran és la dificultat d'experimentació directa i les limitacions de precisió en les tècniques de càlcul.

El descriptor més rellevant, en ambdós dominis, és la relació entre la pressió i la velocitat a l'entrada de l'instrument (Fig.4.1).

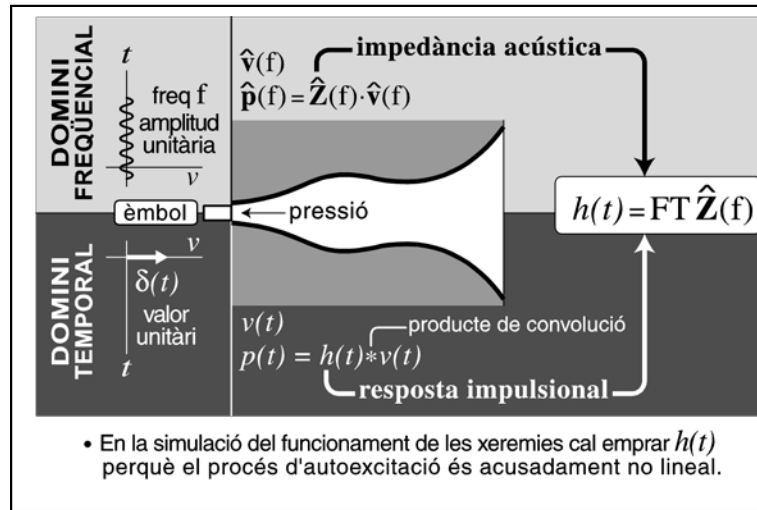


Figura 4.1 Domini freqüencial versus domini temporal. Impedància acústica $\hat{Z}(f)$ i resposta impulsional $h(t)$.

En el domini freqüencial és l'anomenada *impedància acústica d'entrada* $\hat{Z}(f)$, que descriu la resposta estacionària en pressió –en amplitud i fase– a una entrada de velocitat sinusoidal d'amplitud unitària. La resposta estacionària en pressió $\hat{p}(f)$ a una velocitat d'entrada $\hat{v}(f)$ arbitrària ve donada pel producte de variables complexes $\hat{p}(f) = \hat{Z}(f) \cdot \hat{v}(f)$. En el domini temporal, és l'anomenada *resposta impulsional d'entrada* $h(t)$, que descriu la resposta en pressió a una velocitat d'entrada impulsional unitària (delta de Dirac). La resposta en pressió $p(t)$ a una velocitat d'entrada $v(t)$ arbitrària ve donada pel *producte de convolució*:

$$p(t) = h(t) * v(t) \equiv \int_0^t h(\tau) v(t - \tau) d\tau. \quad (4.1)$$

Els dos descriptors es relacionen per mitjà de la transformada de Fourier, $h(t) = FT \hat{Z}(f)$, quan aquesta existeix.

En la simulació del funcionament de les xeremies, cal emprar la resposta impulsional $h(t)$ perquè el procés d'autoexcitació és acusadament no lineal (Barjau, 1987; Barjau and Agulló, 1989). A l'hora de trobar $h(t)$, la via experimental és problemàtica. En el domini temporal, com que no es pot experimentar amb cabals que siguin una delta de Dirac, cal fer servir la resposta a una pulsació finita de cabal, cosa que, d'acord amb l'equació (4.1), obliga a un procés de *desconvolució numèrica*. Com que aquest procés implica la inversió d'una matriu singular, per tal d'estabilitzar-lo cal recórrer a tècniques de regularització com la *descomposició matricial en valors singulars* (MSVD) (Sondhi and Resnick, 1983; Press et al., 1988a) o bé a procediments iteratius com el *mètode del gradient conjugat* (CGM) (Sarkar et al., 1985; Press et al., 1988b), però en ambdós casos la solució presenta incerteses (Agulló et al., 1995). L'experimentació en l'àmbit freqüencial, fent la mesura de la impedància acústica $\hat{Z}(f)$, que és senzilla i molt precisa, i

obtenint $h(t)$ com a transformada de Fourier, presenta el problema de la resolució temporal assolible per a $h(t)$, que ve donada per la inversa de la freqüència màxima (en Hz). No és usual anar més enllà de 10 kHz en la mesura de $\hat{Z}(f)$, valor que limita la resolució temporal a 0,1 ms, insuficient en molts casos.

L'obtenció de $h(t)$ per càlcul tampoc està lliure de problemes. En principi, el càlcul de $\hat{Z}(f)$ no presenta dificultats conceptuals per a columnes d'aire que es puguin descriure per mitjà de trams cilíndrics i cònics. Es pot obtenir a partir dels *coeficients de reflexió* $\hat{R}_+(f)$ i $\hat{R}_-(f)$ associats a les discontinuïtats (figura 4.2) i a les obertures a l'exterior (Cardona, 1981), que relacionen l'ona propagativa reflectida a la discontinuïtat amb l'ona incident. $\hat{p}_-(f)$ és representatiu d'una ona sinusoidal de pressió que es propaga tub avall (vers l'extrem obert), i $\hat{p}_+(f)$ en representa una que es propaga tub amunt (vers l'extrem on hi ha la canya). I, anàlogament, en la descripció temporal: $p_-(t)$ i $p_+(t)$ són ones de pressió que viatgen tub avall i tub amunt, respectivament.

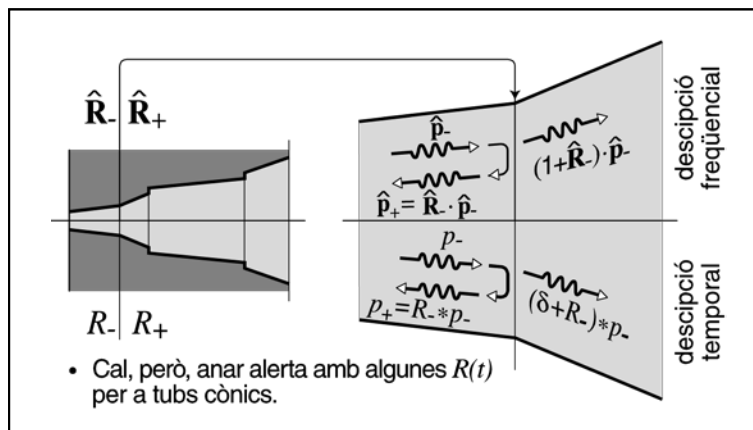


Figura 4.2 Coeficients de reflexió $\hat{R}(f)$ i funcions de reflexió $R(t)$ associats a una discontinuïtat.

Hi ha, però, el problema ja esmentat de la resolució temporal de $h(t)$, que demanaria un interval freqüencial inassolible per a $\hat{Z}(f)$. Queda com a opció el càlcul de $h(t)$ directament en el domini temporal per mitjà de les *funcions de reflexió* $R_+(t)$ i $R_-(t)$ associades a les discontinuïtats i a les obertures. I aquí es va presentar una dificultat del tot imprevista: algunes de les funcions de reflexió en discontinuïtats de tubs cònics no apareixien en la bibliografia. Només vam trobar algun comentari al·lusionari a la inexistència de la seva transformada de Fourier que les relacionés amb els corresponents coeficients de reflexió.

L'origen del problema es trobava en les ones propagatives emprades per a descriure l'acústica dels tubs cilíndrics i cònics -que fonamentaven la formulació dels coeficients i funcions de reflexió- perquè en el cas dels tubs cònics convergents la descripció matemàtica discrepava de la realitat física (Ayers, 1985). Així com les *ones planes* -que són les considerades en els tubs cilíndrics- i les *ones esfèriques divergents* -que són les considerades en els tubs cònics divergents- tenen plena vigència física com a règims vibratoris permanents -poden propagar-se indefinidament en el temps- tal com pressuposa la seva descripció matemàtica, aquest no és el cas de les *ones esfèriques convergents* -que són les considerades en els tubs cònics convergents-. Físicament, del

centre o del vèrtex del con no es passa: les ones hi són reflectides com a ones divergents. La descripció matemàtica que se'n fa, que pressuposa un règim propagatiu convergent permanent, discrepa d'aquesta realitat física. I aquí comencen les dificultats.

La descripció matemàtica de les ones propagatives preveu, per a un tub cònic convergent (figura 4.3), que la introducció d'un impuls unitari de velocitat $a\delta(t)$ –amb a amb dimensions de longitud i valor unitari i $\delta(t)$ l'impuls de Dirac– origina a la secció d'entrada (en rigor esfèrica i situada a la distància r_0 del vèrtex) una pressió:

$$p(t, r_0) = Z_0 a \delta(t) + Z_0 \frac{c}{r_0} a \delta(t) e^{\frac{c}{r_0} t} = h(t) ; v(t, r_0) = a \delta(t) \quad (4.2)$$

D'aquesta formulació de la pressió, només es correspon amb la realitat física l'interval temporal $0 \leq t \leq (2r_0/c)$, a partir del qual arriben reflexions del vèrtex.

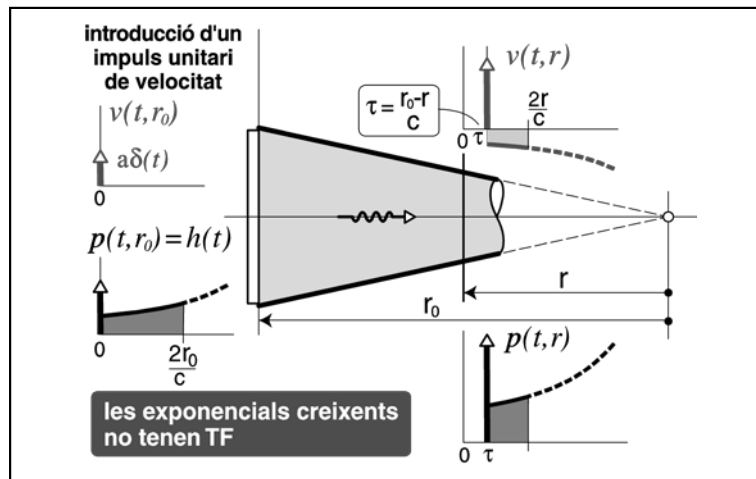


Figura 4.3 Propagació d'impulsos en un tub cònic convergent.

Per a una distància $r < r_0$ del vèrtex, la formulació de la pressió i velocitat, amb $\tau = (r_0 - r)/c$, són:

$$p(t, r) = Z_0 \frac{r_0}{r} a \delta(t - \tau) + Z_0 \frac{c}{r} a \varepsilon(t - \tau) e^{\frac{c}{r_0} (t - \tau)} , \quad (4.3)$$

$$v(t, r) = \frac{r_0}{r} a \delta(t - \tau) - c \frac{r_0 - r}{r^2} a \varepsilon(t - \tau) e^{\frac{c}{r_0} (t - \tau)} . \quad (4.4)$$

Tant els valors dels impulsos com els valors d'inici de les exponencials tendeixen hiperbòlicament vers infinit en apropar-se a al vèrtex, punt que constitueix una singularitat. Tot i que aquestes expressions preveuen $p(t, r)$ i $v(t, r)$ per a $t > \tau = (r_0 - r)/c$, la significació física d'aquestes expressions està limitada a $\tau = (r_0 - r)/c < t < (r_0 + r)/c$,

interval entre l'arribada a r de l'ona d'entrada i l'arribada de la seva reflexió al vèrtex. La presència d'exponencials creixents en aquestes funcions i en les que se'n deriven –funcions de norma no acotada i, per tant mancades de transformada de Fourier que permeti relacionar-les amb les corresponents en el domini freqüencial– havia estat la causa que certes funcions de reflexió per a discontinuïtats en tubs cònics no haguessin estat desenvolupades.

Va caler formular aquestes funcions de reflexió (Martínez, 1987; Martínez and Agulló, 1988) –necessàries per al càlcul directe en el domini temporal de la resposta impulsional d'entrada $h(t)$ – i preveure'n la seva utilització adequada i numèricament estable (Martínez *et al*, 1988; Agulló *et al.*, 1992). Per a la discontinuïtat de pas de tub cilíndric a cònic convergent (figura 4.4), en la funció que descriu la reflexió que té realitat física –incloses les reflexions al vèrtex–si bé hi ha un tram inicial exponencial creixent, les reflexions la venen a modificar i a mantenir amb norma finita. La idealització matemàtica donada per l'exponencial creixent per a temps no acotat és útil, però cal emprar-la amb precaucions.

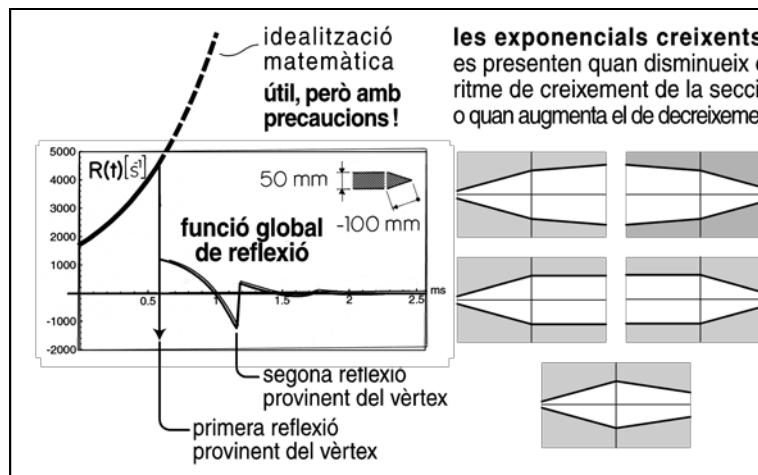


Figura 4.4 Funcions de reflexió amb exponencials creixents.

Les exponencials creixents es presenten en les funcions de reflexió quan en la discontinuïtat disminueix el ritme de creixement de la secció o quan augmenta el de decreixement.

4.2 MÈTODE DE MULTICONVOLUCIÓ.

Un altre pas remarcable en el càlcul de la $h(t)$ directament en el domini temporal va ser la formulació del *procés de multiconvolució* (Martínez *et al*, 1988; Barjau *et al*, 1988) per a tubs formats per trams cilíndrics i cònics, i amb obertures a l'exterior. Els treballs publicats fins aleshores –limitats a casos amb funcions de reflexió sense exponencials creixents– resseguien individualment cadascuna de les reflexions que s'originaven a les discontinuïtats i en feien la suma. Per a un nombre realista de discontinuïtats, el nombre de reflexions a considerar creix exponencialment en el temps (figura 4.5), cosa que fa inviable el càlcul de $h(t)$ per a l'interval temporal necessari.

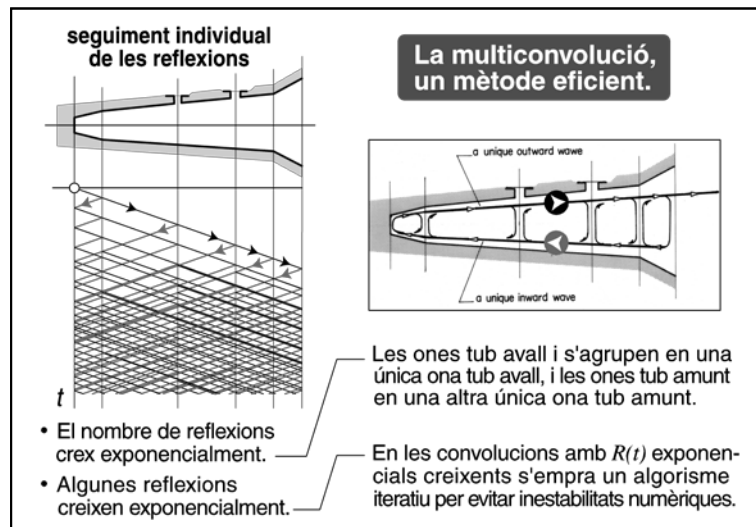


Figura 4.5 De les funcions de reflexió $R(t)$ a la resposta impulsional $h(t)$.

Vàrem resoldre aquesta dificultat procedint a descriure en cada tram del tub totes les ones tub avall i totes les ones tub amunt per mitjà d'una única ona tub avall i una altra tub amunt. Això s'aconsegueix sumant a cada discontinuïtat, des de bon començament, l'ona tramesa amb la reflectida del seu mateix sentit. Amb això quedava resolta la dificultat del nombre creixent d'ones a considerar. La dificultat associada a la presència de funcions de reflexió amb exponencials creixents es va resoldre amb un algorisme iteratiu d'integració apropiat per a funcions exponencials. D'aquesta manera s'evitava haver d'obtenir un valor finit com a diferència de dos valors que creixien exponencialment.

4.3 FUNCIONS DE RESPOSTA IMPULSIONAL ALTERNATIVES.

El pas següent al càlcul de $h(t)$ era la seva utilització en la modelització de les vibracions autoexcitades en la columna d'aire interior del tub, basada en la integral de convolució de l'equació 4.1, en la qual $v(t)$ està relacionada amb $p(t)$ per la dinàmica no lineal del dispositiu d'autoexcitació. Com que per a tubs amb radiació i esmorteïment intern febles la funció $h(t)$ decau lentament, va aparèixer en la bibliografia dels anys 80 una proposta d'utilització de funcions de resposta impulsional alternatives obtingudes per acoblament de la secció d'entrada a una prolongació o terminació anecoica (figura 4.6), acoblament que les extingeix més ràpidament.

La proposta va tenir el seu origen en la modelització dels transitoris d'atac en el clarinet (Schumacher, 1981) i, consegüentment, s'aplicava a tubs cilíndrics, que són el paradigma de la simplicitat en l'acústica de tubs en el domini temporal. En aquest cas la resposta impulsional alternativa $h'(t)$ estableix la relació:

$$p(t) = h'(t) * \left[v(t) + \frac{p(t)}{Z_0} \right] \quad (4.5)$$

Vàrem explorar la possible utilització d'aquesta estratègia al cas de les xeremies (Agulló and Barjau, 1986; Agulló *et al*, 1988), que en tenir una entrada cònica divergent porta a introduir una prolongació anecoica virtual convergent (figura 4.6). Aquesta prolongació, si bé pot ser formulada matemàticament i dóna lloc a la resposta impulsional alternativa $h''(t)$, no es correspon amb la realitat física –les ones es reflecteixen al vèrtex–. Si el tub té alguna funció de reflexió amb un terme exponencial creixent, aquest creixement no és cancel·lat per la prolongació anecoica i $h''(t)$ és no acotada, amb la qual cosa no pot ser emprada com a nucli d'una integral de convolució. En absència de reflexions amb exponencials creixents, la resposta impulsional alternativa $h''(t)$ estableix la relació:

$$p(t) = h''(t) * \left[v(t) + \frac{p(t)}{Z_0} + \frac{c}{Z_0 r_a} \int_0^t p(t) dt \right] \quad (4.6)$$

on r_a és la distància de la secció d'entrada al vèrtex de la prolongació anecoica virtual cònica.

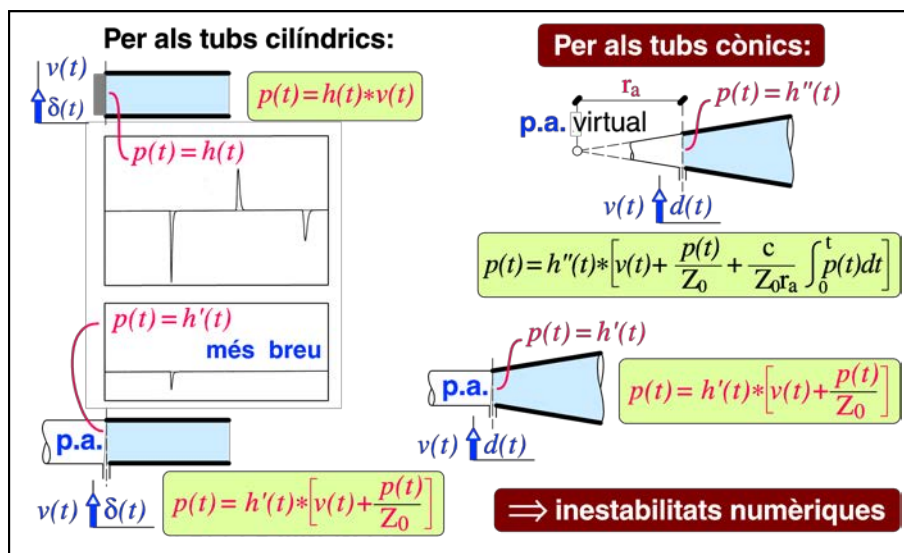


Figura 4.6 L'aparent simplificació de les prolongacions anecoiques.

En les xeremies, en ser la secció d'unió del tudell amb el tub cònic principal una discontinuïtat amb funció de reflexió amb una exponencial creixent, l'estratègia de la prolongació cònica anecoica (en versió matemàtica) és inviable.

Com a alternativa que evitava aquest inconvenient, vam considerar l'acoblament de la secció d'entrada de la xeremia a una terminació anecoica cilíndrica (figura 4.6), per a la qual la versió

matemàtica era físicament consistent. En aquest cas la resposta impulsional alternativa $h'(t)$ no s'extingeix tan ràpidament com en el cas de la prolongació anecoica virtual cònica perquè el canvi de conicitat en la secció d'unió es generen reflexions –per bé que amb funcions de reflexió sense exponencial creixent–. En aquest cas, la resposta impulsional alternativa $h'(t)$ relaciona la pressió i velocitat a la secció d'entrada d'acord amb l'equació 4.6, l'aplicació numèrica de la qual originava inestabilitats per causa de la funció de reflexió amb exponencial creixent associada a la unió del tudell amb el tub cònic principal.

No va quedar, doncs, altra opció que emprar la resposta impulsional genuïna $h(t)$ tot i el seu decaïment més lent.

4.4 UNA EQUACIÓ D'ONA UNIDIMENSIONAL GENERAL PER A TUBS AXISIMÈTRICS.

En la modelització emprada de l'acústica de tubs formats per trams cilíndrics i cònics, implícitament es negligia, a cada discontinuïtat, la inèrcia i compressibilitat del volum d'aire contingut entre la secció final d'un tram i la inicial del següent, seccions que són planes per als trams cilíndrics i esfèriques per als cònics. Aquest fet no és preocupant per a les discontinuïtats al llarg del cos principal de l'instrument, però pot ser-ho en el pavelló, quan és modelitzat com una successió de trams cònics. Això ens va portar a considerar l'acústica de pavellons o guies-ona de secció variable, limitant-nos al cas d'ones unidimensionals en tubs axisimètrics.

Les equacions d'ona unidimensionals clàssiques per a guies ona de secció variable al llarg del seu eix recte, com les formulades per Bernoulli, Lagrange i Euler el segle XVIII, Green i Helmholtz el segle XIX, i Rayleigh i Webster el segle XX, consideren que les ones són planes, hipòtesi que no compleix la condició d'ortogonalitat de les superfícies equipotencials amb la paret del tub de secció variable (figura 4.7).

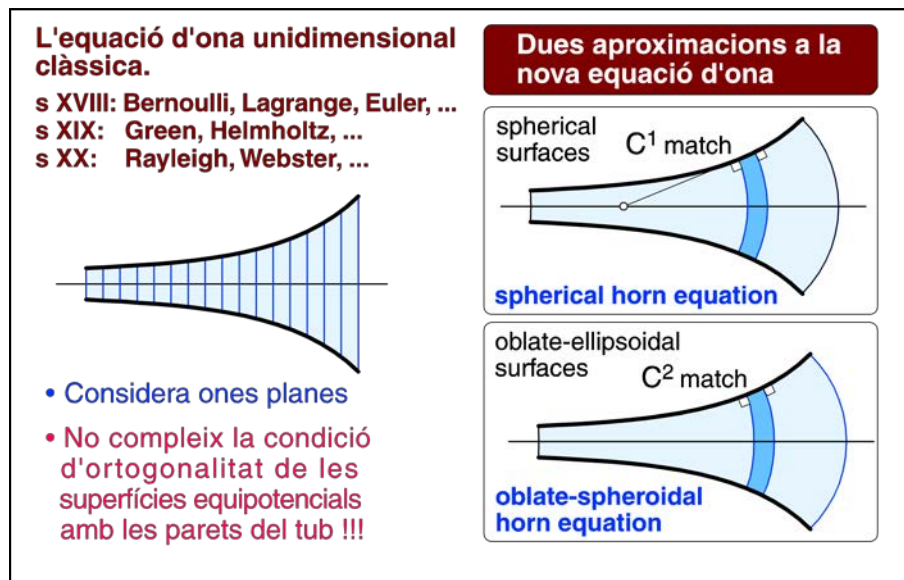


Figura 4.7 Un pas més en les equacions d'ona unidimensionals. Versions *esfèrica* i *oblata-esferoidal* de l'equació dels pavellons.

Més recentment havien aparegut intents de formulació d'equacions d'ona unidimensionals per a pavellons que satisfessin la condició d'ortogonalitat (Weibel, 1955; Benade and Jansson, 1974), però no havien acabat de resoldre bé la intervenció de la inèrcia i compressibilitat dels volums continguts entre la secció final d'un diferencial de pavelló –descriu d'acord amb un cert ajust de coordenades– i la d'entrada del següent diferencial. En línia amb aquests intents, vàrem formular una equacions d'ona unidimensional per a pavellons axisimètric que verificuessin la condició d'ortogonalitat de les superfícies equipotencials amb la paret del pavelló (Agulló *et al.*, 1999; Keefe and Barjau, 1999; Jordi, 1999). Vàrem definir les superfícies equipotencials per mitjà de coordenades locals que garantissin la doble condició d'ortogonalitat a l'eix i amb la paret del pavelló. Com a graus progressius d'aproximació ho varem particularitzar al cas de les coordenades locals esfèriques i al cas de les coordenades locals oblates esferoidals.

Equació d'ona esfèrica (*Spherical horn equation*). Es deriva d'un ajust local amb coordenades esfèriques. A cada secció del pavelló es considera que la superfície equipotencial és la superfície esfèrica que li és ortogonal (figura 4.7). Aquest és un ajust de primer grau –ajust C^1 – entre les coordenades ortogonals locals i les associades al pavelló: la superfície cònica ortogonal a la superfície equipotencial esfèrica és tangent al pavelló en la secció considerada. El gruix dels elements és més gran en l'eix que en el contorn tocant al pavelló.

Equació d'ona esferoidal oblata (*oblate spheroidal horn equation*). Es deriva d'un ajust local amb coordenades oblates esferoidals. A cada secció del pavelló es considera que la superfície equipotencial és la superfície el·lipsoïdal que li és ortogonal i per a la qual la superfície hiperboloidal ortogonal té la mateixa curvatura local del perfil del pavelló (figura 4.7). Aquest és un ajust de segon grau –ajust C^2 – entre les coordenades ortogonals locals i les associades al pavelló. El gruix dels elements és més gran en l'eix que en el contorn tocant al pavelló, però menys acusadament que en el cas de l'ajust esfèric.

Aquestes equacions d'ona van ser aplicades als tres pavellons amb definició analítica més emblemàtics i ben estudiats en l'àmbit dels instruments musicals:

- Cas del *pavelló exponencial*: $R(z) = R_0 e^{\mu z}$.
- Cas del *pavelló catenoïdal*: $R(z) = R_0 \cosh(\mu z)$.
- Cas del *pavelló de Bessel*: $R(z) = R_0 (1 - \mu z)^{-\sigma}$.

Fetes les comprovacions es va concloure que, per als pavellons emprats en les xeremies, el petit guany aconseguit respecte a emprar l'equació d'ona unidimensional clàssica, com la de Webster, no compensava l'esforç.

La figura 4.8 mostra una panoràmica dels avenços fets en la recerca pròpia relativa a l'acústica de la *tenora*, en paral·lel amb l'evolució de l'acústica musical en l'àmbit internacional descrita per mitja de les fites històriques més destacades (Nederveen, 1969; Benade, 1976; Backus, 1977). Al marge d'aquestes fites internacionals, són remarcables les fites pròpies consistents en la primera simulació –en l'àmbit internacional– dels transitoris d'atac d'una xeremia (Barjau, 1987), l'aprofundiment en l'estudi del funcionament de les xeremies en el domini

temporal (Agulló, 2001), així com l'aplicació del coneixement científic adquirit al redisseny d'una xeremia existent –la *tenora*– (Barjau *et al*, 2007) i al disseny d'un nou instrument –la *barítona*–, aquests dos darrers treballs desenvolupats en el marc dels programes de recerca de l'Institut d'Estudis Catalans que es descriuen en la secció 6.

| The <i>tenora</i> in the Musical Acoustics context. | | | |
|--|---|-------------------------|---|
| related international milestones | | | <i>tenora</i> |
| 60's | Nederveen's frequency-domain models based on length corrections | Frequency-domain models | |
| | Backus's input impedance measurements on clarinets | | <ul style="list-style-type: none"> • Input impedance measurements and calculations • Spectral analysis of the pressure wave inside the staple |
| 70's | Benade's frequency-domain theory of modal collaboration | Time-domain models | <ul style="list-style-type: none"> • Formulation of reflection functions • Multiconvolution algorithm • Time-domain simulation • Computer Aided Design |
| 80's | Ayers's time-domain acoustics of conical bores | | |
| | Schumacher's <i>ab initio</i> calculations of clarinet starting transients | | |
| 90's | | | Basic research on: <ul style="list-style-type: none"> • Horn time-domain wave equation • Time-domain deconvolution |
| 00's | | | <ul style="list-style-type: none"> • Towards a better understanding of its time-domain behaviour • Redesign of the <i>tenora</i> • Design of the <i>barítona</i> |

Figura 4.8 La recerca de la *tenora* en el context de l'Acústica Musical.